

# Fehler - eine Chance zum Lernen

Günter HANISCH, Wien

## 1. Einleitung

"Cuius vis hominis est errare, nullius nisi insipientis in errore perseverare." (CICERO, Phillipinische Reden 12/2), was in etwa bedeutet, dass es dem Menschen eigen ist zu irren, aber nur der Dumme im Irrtum verharrt.

Und die PsychologInnen unterscheiden zwischen zwei prinzipiellen Problemlösestrategien, nämlich durch Einsicht sowie durch Versuch und Irrtum.

Dieser Beitrag soll dazu ermutigen, Fehler zuzulassen und in ihnen eine Chance zum Lernen zu sehen. Da es dabei um Fehler geht, die aus Unkenntnis der Sachlage oder aus mangelnder Aufmerksamkeit entstehen, werden im Folgenden alle anderen Fehlerursachen, wie etwa neurotische Lernstörungen, Legasthenie oder aber auch das absichtliche Machen von Fehlern, wie etwa die Aufgabenstellung eines Schularbeitsbeispiels zu vereinfachen, ausgeklammert.

## 2. Diagnose von Fehlern

Um einen Fehler bei einer Mathematikaufgabe zu machen, gehören zwei dazu, nämlich der oder die SchülerIn und die Mathematikaufgabe.

Warum von einem bzw. einer SchülerIn gerade ein bestimmter Fehler gemacht worden ist, kann im Allgemeinen ohne Mitwirken dieses bzw. diesem SchülerIn nicht festgestellt werden, obwohl es gute Einteilungen der SchülerInnenfehler gibt (siehe etwa REITBERGER 1989, S.317). daher soll im Folgenden auf die Schwierigkeiten, die in der Mathematik per se liegen, eingegangen werden.

Als Erstes ist die knappe und nicht redundante Schreibweise zu nennen, die der Notation der heutigen Mathematik zu Eigen ist und die noch dazu widersprüchlich ist.

Ein Beispiel: Das Aneinanderschreiben von Zeichen kann höchst Verschiedenes bedeuten:

- $ab$  : a mal b
- $3a$  : 3 mal a
- $31$  : 3 mal 10 + 1
- $3\frac{1}{2}$  : 3 plus  $\frac{1}{2}$
- $a(3+x)$  : a mal (3+x)
- $f(3+x)$  : Funktion von (3+x)
- $\sin 2x$  : Sinus von 2 mal x

Das soll nun kein Plädoyer für eine Änderung der Schreibweise sein, denn auch in Verträgen ist nicht immer offensichtlich, was das Kleingedruckte bedeutet, aber die SchülerInnen sollten auf diese Besonderheit nicht nur einmal sondern immer wieder hingewiesen werden; vielleicht wird dann weniger oft  $\sin 2x/2$  durch 2 gekürzt-

Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, dass die Mathematik zur Übergeneralisierung herausfordert.

Ein Beispiel: Für die Addition und die Multiplikation gelten in weiten Bereichen dieselben Regeln, in einigen wenigen aber ganz andere, so daß die SchülerInnen beispielsweise dazu verführt werden, eine für die Multiplikation geltende Regel auch auf die Addition anzuwenden. Diesen Vorgang nennt man Generalisation, eine an sich sehr nützliche und für das Überleben notwendige Eigenschaft, die man auch zur Lösung von Mathematikaufgaben braucht, da man mit ihrer Hilfe die Lösungsstrategie, die beim Lösen der einen Aufgabe erfolgreich war, auch bei einer anderen anwendet. Und dadurch passiert es, das  $(2+3a)/3$  durch 3 gekürzt wird oder aus dem pythagoräischen Lehrsatz die Wurzel gezogen wird.

Aber auch darin liegt ein großer erzieherischer Wert der Mathematik. Der bzw. die SchülerIn muß lernen, daß man in der Mathematik - so wie im täglichen Leben - nur nach genauer Prüfung Generalisieren darf. Allerdings tragen auch wir MathematiklehrerInnen an der Übergeneralisation Schuld, weil auch wir im Unterricht aus Zeitmangel zum Beispiel Regeln auf andere Zahlbereiche unüberprüft übernehmen, wie etwa die Multiplikationsregel für Potenzen mit gleicher Basis auf irrationale Hochzahlen.

Ein weiteres Problem liegt darin, daß wir MathematiklehrerInnen zu viel im Kopf rechnen und wenn uns das SchülerInnen nachmachen, sie dann scheitern müssen. Der Grund dafür liegt in der beschränkten Speichermöglichkeit unseres unmittelbaren Gedächtnisses (auch Ultrakurzzeitgedächtnis genannt). In diesem können wir nur etwa sieben Inhalte etwa 20 Sekunden lang speichern, wobei die zweite Barriere diejenige ist, die beim Rechnen hinderlich ist. Sie können dies bei sich selbst beobachten, wenn Sie beispielsweise 248 mit 252 multiplizieren. Sie müssen dabei immer wieder das bereits Gerechnete wiederholen, damit es nicht vergessen wird. (Es sei denn, Sie verwenden einen Trick, wie etwa  $248 \cdot 252 = (250-2) \cdot (250+2) = 250^2 - 2^2 = 62500 - 4 = 62496$ .)

Viele Vorzeichenfehler können durch dieses Phänomen erklärt werden; dabei wäre die Abhilfe so einfach: Zuerst das Vorzeichen bestimmen und dann sofort hinschreiben, damit es nicht wieder vergessen werden kann.

Derselbe Vergessens-Effekt tritt auch bei Textaufgaben auf. Auch dort ist es wichtig, sich sofort aufzuschreiben, welche Bedeutung die verwendeten Buchstaben haben und dann noch einmal den Text durchzugehen, um festzustellen, daß die in ihm enthaltenen Beziehungen auch richtig in die mathematische Formalsprache übersetzt worden sind. Und wenn die Aufgabe gelöst ist, muß noch einmal der Angabetext durchgelesen werden, um zu überprüfen, ob nicht irgendeine Frage vergessen worden ist. Und dabei kann auch gleich die Probe gemacht werden. Gerade letzteres ist ein wesentlicher Punkt, da dadurch die Kompetenz für die Richtigkeit einer Lösung von der Lehrkraft auf den/der Schülerin übergeht.

### 3. Maßnahmen gegen Fehler

OSER u. HASCHER (1997, S. 24f) konnten durch Unterrichtsbeobachtungen folgende drei Muster, wie Lehrkräfte mit Fehlern umgehen, ausmachen:

1. Vorwegnehmende Fehler
2. Publikmachen von Fehlern
3. Bermuda-Dreieck

1. Vorwegnehmende Fehler: Darunter wird verstanden, daß die Lehrkraft bereits bei der Erklärung eines neuen Lernstoffs auf mögliche Fehlerquellen aufmerksam macht, also wenn etwa gleich nach der Herleitung des Pythagoräischen Lehrsatzes darauf aufmerksam gemacht wird, daß aus der Quadratsumme nicht gliedweise die Wurzel gezogen werden darf. OSER u. HASCHER fragen allerdings dazu, ob Personen nicht selber die Fehler begehen müssen, um daraus zu lernen, und meinen, daß vorausgeschicktes Fehlerwissen weniger Effizienz hat. Dem ist allerdings entgegenzuhalten, daß auf mögliche Fehler hinzuweisen nicht schädlich für die Lernenden ist und daß schon POPPER, indem er sagte: "Laßt Hypothesen sterben!", darauf hinwies, daß Menschen über die Folgen einer Handlung vorher nachdenken sollten, bevor sie diese begehen. Daher meint der Verfasser, daß es höchst sinnvoll ist, Lernende auf mögliche Fehlerquellen hinzuweisen, da diejenigen, die diese Hinweise nicht beachten, sowieso aus dem Machen der eigenen Fehler dann profitieren können. OSER u. HASCHER versuchen ihre Hypothese dadurch zu belegen, indem sie darauf hinweisen, daß das Lernen "Auto zu fahren" ein typisches Beispiel dafür wäre, es aber nach Meinung des Verfassers schon sinnvoll wäre, eventuelles Fehlverhalten antizipativ vorwegzunehmen, wie etwa das Nicht-Stehenbleiben vor einem Stoppschild.
2. Publikmachen von Fehlern: Hierbei wird versucht, aus Fehlern, die einzelne oder mehrere Lernende begangen haben, zu lernen, indem diese Fehler den anderen mitgeteilt werden. OSER u. HASCHER weisen mit Recht darauf hin, daß diese Vorgehensweise verletzend für die so Gebrandmarkten sein könne. Daher sollte nach Meinung des Verfassers - sofern noch kein "positives Fehlerklima" in der Klasse hergestellt werden konnte (siehe dazu später) - die Hinweise anonym erfolgen. Die Durchsicht von Hausaufgaben könnte dazu geeignetes Material liefern, wogegen die übliche Praxis, dies bei der Verbesserung der Schularbeit zu tun, zu spät kommen dürfte, da zu diesem Zeitpunkt keine Fehler mehr begangen werden sollten.
3. Bermuda-Dreieck: Dabei handelt es sich um folgende Vorgangsweise, die vornehmlich im fragend-entwickelnden Unterricht angewendet wird. Dabei stellt die Lehrkraft eine Frage und ruft eine(n) Lernenden auf und, falls diese(r) dies nicht weiß oder einen Fehler macht, darauf den/die nächsten SchülerIn, damit diese(r) die richtige Antwort gibt. Durch diese Vorgehensweise steht aber nicht mehr das Lernen an sich im Vordergrund, sondern das Ergebnis, welches ja an sich nicht das Wichtige ist, denn gerade für Mathematik gilt "Der Weg ist das Ziel"; denn ginge es etwa nur um die Lösung einer Mathematikaufgabe, so könnte diese ja bequem und vor allem viel schneller durch Nachschlagen im Lösungsheft gefunden werden. Da im Allgemeinen der/die Lernende auch durch diese Situation frustriert ist, verschwindet das Lernpotenzial "wie ein Flugzeug im Bermudadreieck" (OSER u. HASCHER (1997, S. 25). Aber nicht nur dadurch kann sich kein Fehlerwissen aufbauen, sondern es ist oft auch so, dass die Antwort des/der SchülerIn an sich richtig wäre, aber nicht in das Konzept der Lehrkraft passt, da die Antworten der SchülerInnen "der Lehrperson oft nur als Mittel auf ihrem Weg einen bestimmten Inhalt zu vermitteln" dienen (SPYCHIGER u.a., 1997, S. 8).

Aus dem oben Ausgeführten kann man erkennen, dass alle drei Maßnahmen nicht immer zu einem erwünschten Umgang mit Fehlern führen. Was wäre also zu tun?

Im vorigen Abschnitt sind bereits einige Maßnahmen aufgezählt worden, nämlich in den SchülerInnen ein Metawissen aufzubauen wie etwa über die Verschiedenheit gleichaussehender Symbolgruppen oder die Schwierigkeit sich Zwischenergebnisse längere Zeit zu merken. Eine weitere wäre, etwa andere Unterrichtsformen, wie den offenen Unterricht, zu präferieren. Damit ließe sich etwa das Bermudadreieck vermeiden.

Wichtiger erscheint dem Verfasser aber einen anderen Umgang mit Fehlern zu erlernen. Fehler sind die Chance zum Lernen, oder wie Churchill einmal sagte: "Fehler, aus denen man lernen kann, sollte man möglichst früh begehen." Daher ist die Idee eines neuen Fehlerklimas die, dass "nicht nur die Toleranz oder Akzeptanz von Fehlern wachsen, sondern auch ein systematisches Know-how zum Umgang damit und zu seiner pädagogischen Fruchtbarmachung erstellt und vor allem auch umgesetzt werden" (SPYCHIGER u.a. 1997). Nach DICK (1996, S.80) ist gerade dies ein Kennzeichen des erfolgreichen Unterrichts von erfahrenen Lehrpersonen, da diese im Stand sind, Fehlersituationen in Lernsituationen umzuwandeln.

Um das Fehlerklima zu messen konstruierten SPYCHIGER u.a. (1998, S. 21) einen Fragebogen und fanden mittels einer Faktorenanalyse folgende drei Faktoren heraus, mit denen SchülerInnen die Fehlerkultur in ihrer Klasse in einem bestimmten Gegenstand einschätzen (vgl. SPYCHIGER u.a., 1998, S. 21):

1. Lehrkraftverhalten: Hier schätzen die SchülerInnen die Lehrkraft bezüglich ihres Umgangs mit Fehlern ein, was etwa durch das Item "Unsere Lehrerin versucht es zu vertuschen, wenn sie einen Fehler macht" gemessen wird.
2. Selbstfaktor kognitiv: Die SchülerInnen schätzen ihren eigenen Umgang mit Fehlern ein, wie etwa durch das Item "Es macht mir Freude, mir durch Fehler neues Wissen anzueignen".
3. Selbstfaktor emotional: Die SchülerInnen schätzen ihre emotionalen Reaktionen im Zusammenhang mit dem Fehlermachen ein, wie etwa durch das Item "Ich bekomme Angst, wenn ich im Unterricht Fehler mache".

In so einem positiven Fehlerklima wäre es etwa wichtig, dass man so wie im Deutsch- und im Fremdsprachenunterricht seine eigenen persönlichen Fehler kennt. Erkenne dich selbst! Weiß jemand, dass für ihn etwa das Umformen von einfachen Bruchgleichungen ein Problem darstellt, so kann er dies erstens gezielt üben und zweitens besonders aufpassen, wenn ihm so ein Problem unterkommt.

Daher hat MÜLLER Martina (1998) in ihrer Dissertation, bei der sie Fehler in der Trigonometrie untersucht hat, den SchülerInnen zuerst ein Fehlerdiagnoseprogramm vorgelegt, damit die SchülerInnen ihre Schwachpunkte erkennen, und dann erst gezielt ein "Fehlerbehebungsprogramm" eingesetzt.

Daher findet der Verfasser die übliche Praxis der Verbesserung von Schularbeiten, bei der in der Schule die Schularbeitsaufgaben vorgerechnet werden und wo dann die SchülerInnen im Schularbeitsheft entweder einen Hinweis anbringen, dass die Verbesserung im Schularbeitsheft steht, oder sie schreiben die Aufgaben, die in der Schularbeit fehlerhaft gerechnet worden sind, ins Schularbeitsheft ab, als nicht zielführend. Viel wichtiger als ein Abschreiben wäre zweierlei:

1. Der/die SchülerIn trägt ihre Fehler in eine Fehlerkartei oder ein Fehlerheft ein.
2. Der/die SchülerIn überlegt sich, was sie tun wird, damit dieser Fehler nicht noch einmal passiert, und trägt ihre Überlegungen in das Schularbeitsheft ein.

Allerdings kommen diese Maßnahmen - wie bereits vorhin hingewiesen - reichlich spät, da die Schularbeit als Beurteilungsinstrument ja bereits fehlerfrei sein sollte. Man kann dies mit kreativitätsfördernden Maßnahmen vergleichen, bei denen es eine Grünlicht- und eine Rotlichtphase gibt und wo erst in letzterer die Kontrolle vorgenommen wird (vgl. HANISCH 1982, S. 86). Auch bei einem aus "Fehlern Lernen" sollte in der Übungsphase Fehler zu machen erlaubt sein, ja im Sinne eines Experimentierens sogar erwünscht sein. Dabei sollte

auch erlernt werden, wie man Fehler erkennt und insbesondere wie man sie findet und ausbessert. Die dabei zu verwendenden Strategien stellen nur teilweise ein Metawissen dar und sind daher teilweise auch stoffspezifisch und stellen eine Möglichkeit dar, den Mathematikunterricht interessanter und abwechslungsreicher zu gestalten. So können etwa Overheadfolien von fehlerhaft gerechneten Aufgaben verwendet werden, aber auch in den Lehrbüchern findet man entsprechende Hinweise (siehe etwa REICHEL u.a., 1992, Bd. 7, Aufgabe 18). In der Beurteilungsphase hingegen sollten Fehler gar nicht mehr vorkommen.

Eine andere Möglichkeit ein Fehlerwissen aufzubauen, ist die Partnerarbeit, bei der ein(e) MitschülerIn das Heft von jemand anderen korrigiert und mit ihm/ihr dann die dabei aufgetretenen Fehler bespricht. Schule kann dadurch als ein Ort erfahren werden, wo man nicht bei begangenen Fehlern gedemütigt wird, sondern wo man dabei Hilfe erfährt. Dies gelingt MitschülerInnen oft viel leichter als der Lehrkraft, da einerseits im Unterricht meist zu wenig Zeit ist, sich jedem/jeder SchülerIn zuwenden zu können, andererseits aber auch von Lehrkräften "Fehlersituationen ... dazu benutzt werden, angestaute Emotionen und Frustrationen abzureagieren" (OSER u.a. 1997, S. 14).

Ein anderes Problem, durch das Fehler entstehen, ist das Vergessen. Die vermeintliche Stofffülle, an der aber weder die Lehrpläne Schuld sind, noch die Lehrbuchautoren - so steht etwa im LehrerInnenbegleitheft der Lehrbuchreihe von REICHEL u.a., dass deswegen so viele Aufgaben vorgesehen sind, damit die LehrerInnen die Möglichkeit der Auswahl haben und nicht, damit sie alles im Unterricht durchnehmen -, sondern die aus Prestigedenken, aus einer fiktiven Angst vor der Obrigkeit und auch deswegen entsteht, weil es einem schmerzt, die vielen schönen Dinge, die es noch in der Mathematik gäbe, den SchülerInnen vorzuenthalten, zwingt immer wieder neuen Lehrstoff durchzunehmen und den alten nicht zu wiederholen. Als Beispiel mag dafür die Prozentrechnung herhalten. So ist es erschütternd festzustellen, dass folgende Aufgabe, die in etwa so bei TIMSS gestellt worden war, nur von 48 % der österreichischen SchülerInnen gelöst werden konnte (in der AHS waren es nur 43%, in der Berufsschule hingegen 47%!):

Auf der neuen Packung des Müslis "Vitalkraft" steht "20% mehr Inhalt". Die neue Packung enthält 60g mehr als die alte Packung. Wie viel Gramm enthält die neue Packung?

Wäre es daher nicht wichtiger, auf exotische Aufgaben - so schön sie auch sein mögen - zu verzichten und sich auf das Wesentliche zu beschränken? Fragen Sie einmal im Konferenzzimmer ihre nichtmathematischen KollegInnen, was man in der Mathematik unter Differenzieren versteht oder was der Sinus ist. Der Verfasser hat unter anderem diese Fragen an Personen stellen lassen, deren Matura mindestens fünf Jahre zurück lag und Antworten wie, "Das ist die Sache mit dem Strich!" oder "Das ist das, was ich nie gekonnt habe!" bekommen (vgl. HANISCH 1985). Wobei allerdings - und das muss an dieser Stelle betont werden - nach Meinung des Verfassers - die formalen Ziele des Mathematikunterrichts zumindest gleichrangig mit den inhaltlichen zustehen haben (siehe HANISCH 1996). Aber könnte nicht eines dieser formalen Ziele der Umgang mit Fehlern sein? Fehler nicht nur negativ zu sehen, sondern in ihnen die Chance zum Lernen zu sehen und dabei zu lernen aus einer verfahrenen Situation das Beste herauszuholen? Ist diese Erkenntnis zur Lebensbewältigung nicht wichtiger als etwa die Kenntnis der 2. Sätzsätze?

## 4. Schlussbemerkung

Fehler kann man nach dem Schweregrad ihrer Auswirkungen Rang reihen. So ist etwa das Einsetzen eines Herzschrittmachers in den falschen Patienten sicherlich schwer wiegender als jeder in der Schule begangene Fehler. Auch das Überfahren einer Stopptafel und die meisten anderen im Straßenverkehr begangenen Fehler sind schwer wiegender. Fehler bei Mathematikaufgaben hingegen sind harmlos. Die SchülerInnen kommen zur Schule um zu lernen und Fehler sind eine Chance dazu. Wenn hingegen wir LehrerInnen aus Fehlersituationen keine Lernsituationen sondern Stresssituationen machen (vgl. SPYCHIGER 1998, S. 10), indem wir vorschnell daraus Beurteilungssituationen machen oder gar die SchülerIn demütigen, begehen wir sicherlich einen größeren Fehler.

## Literatur

DICK, A.: Vom unterrichtlichen Wissen zur Praxisreflexion: das praktische Wissen von Expertenlehrern im Dienste zukünftiger Junglehrer. Rieden 1992 u. 1996.

HANISCH Günter: Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen? Aus: DÖRFLER, W. u. FISCHER Roland (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. S. 75-82, Wien 1985..

HANISCH Günter: Kreativitätsförderung durch Mathematikunterricht. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft., Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der höheren Schulen, Heft 9, S. 71-88, Wien 1982.

HANISCH Günter: Wozu ist der Mathematikunterricht gut? In: Österreichische Mathematische Gesellschaft., Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der höheren Schulen, Heft 23, S. 106-127, Wien 1995.

MÜLLER Martina: Schülerfehler in der Trigonometrie. Unveröff. Dissertation des Instituts für Erziehungswissenschaften der Universität Wien 1998.

OSER Fritz, SPYCHIGER Maria, HASCHER Tina u. MAHLER Fabienne: Die Fehlerkulturschule. Untersuchung und Veränderung von Fehlerkultur in der Schule. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 2, Freiburg 1997.

OSER Fritz u. HASCHER Tina : Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des "negativen" Wissens. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 1, Freiburg 1997.

REICHEL Christian u.a.: Lehrbuch der Mathematik., Bd. 5 bis 8 Wien 1992.

REICHEL Christian u. GÖTZ Stefan: TIMSS - Informationen, Beispiele und Folgerungen. Wien 1998.

REITBERGER Wolfgang: Typische Schülerfehler beim Erwerb des Bruchzahlbegriffs. Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der

Mathematik in Berlin, S.314--317 Bad-Salzdorf 1989.

SPYCHIGER Maria: Vom Umgang mit dem Fehler im Instrumental- und Vokalunterricht. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 5, Freiburg 1998.

SPYCHIGER Maria, OSER Fritz, HASCHER Tina u. MAHLER Fabienne: Untersuchung u. Veränderung von Fehlerkultur in der Schule: Der Situationsansatz. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. Freiburg 1997.

SPYCHIGER Maria, MAHLER Fabienne, HASCHER Tina u. OSER Fritz: Fehlerkultur aus der Sicht von Schülerinnen und Schülern. Der Fragebogen S-UFS: Entwicklung und erste Ergebnisse. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 4, Freiburg 1998.

Adresse des Verfassers

Günter HANISCH, Mathematisches Institut der Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1090 Wien bzw. Institut für Erziehungswissenschaften der Universität Wien, Garnisongasse 3, 1090 Wien

□